ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1995

MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
OPTIONS M ET P'

CORRECTION [1]

Première partie

I-1 Premières propriétés de l'ensemble $\mathscr{P}$ des suites complexes périodiques :

(a) • L'ensemble $\mathscr{T}(U)$ des périodes est une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide (par définition). Donc elle admet un plus petit élément p_0.

• Soit p une période de U, pour tout entier q, pq est encore une période car pour tout entier n, on a :

$$u_{n+pq} = u_{n+pq-1} = ... = u_{n+p} = u_n.$$

On obtient donc $p_0\mathbb{N}^* \subset \mathscr{T}(U)$.
Inversement, soit $p > 0$ une période de U. On effectue la division euclidienne de p par p_0 qui est non nul.

$$p = qp_0 + r$$

où $0 \leq r < p_0$. On sait que p et que qp_0 sont de périodes de U donc, pour tout entier n,

$$u_{n+r} = u_{n+p-qp_0} = u_{n-qp_0} = u_n.$$

D'après la définition de p_0, nécessairement $r = 0$. Ce qui implique que $p \in p_0\mathbb{N}^*$. D'où :

$$\mathscr{T}(U) = p_0\mathbb{N}^*.$$

• La suite Ω est constante, pour tout entier $p > 0$ et tout entier n on a : $w_{n+p} = w_n$. On en déduit que $\mathscr{T}(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \text{Re}\left(e^{\frac{(n+1)\pi}{2}}\right) = \cos\left(\dfrac{(n+1)\pi}{2}\right)$, donc $c_{n+4} = c_n$. Les premiers termes de la suite C sont

$$c_0 = 0, c_1 = -1, c_2 = 0, c_3 = 1, c_4 = 0, c_5 = -1.$$

Donc 1, 2 et 3 ne sont pas des périodes, par conséquent la plus petite période est 4. On en déduit que $\mathscr{T}(C) = 4\mathbb{N}^*$.

(b) Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite périodique et $p > 0$ une période. Montrons que U est bornée, en effet, soit $M = \max(|u_0|, ..., |u_{p-1}|)$. Pour tout entier n, il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $n = pq + r$. Donc :

$$|u_n| = |u_{pq+r}| = |u_r| \leq M$$

Cela implique que U est bornée et que $\|U\|_\infty = M$. D'où : $\mathscr{P} \subset \mathscr{B}$.
Vérifions maintenant que $\mathscr{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}$.

1. M.TARQI CPGE MOHAMMED VI-KENITRA- MAROC medtarqi@yahoo.fr

• La suite nulle est périodique (de période 1) donc $\mathscr{P} \neq \varnothing$.
• Soit $U \in \mathscr{P}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, la suite λU appartient encore à $\mathscr{P}$ car une période $p > 0$ de U est encore une période de λU.
• Soit $(U, V) \in \mathscr{P}^2$. On considère $p > 0$ une période de U et $q > 0$ une période de V. Posons alors $r = pq$. C'est une période de $U + V$ car, pour tout entier naturel n,

$$(U+V)_{n+r} = u_{n+pq} + v_{n+pq} = u_n + v_n = (U+V)_n.$$

Cela implique que $U + V$ est périodique.
On en déduit que l'ensemble $\mathscr{P}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{B}$.

(c) Supposons par l'absurde que $\mathscr{P}$ est de dimension finie. Soit $U_1, ..., U_n$ une base de $\mathscr{P}$. On note $p_1, ..., p_n$ les périodes des suites $U_1, ..., U_n$.
D'après la démonstration ci-dessus, toute combinaison linéaire des suites $U_1, ..., U_n$ est une suite périodique de période $p = p_1 \times ... \times p_n$. Considérons V une suite de période minimal $p+1$ par exemple la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } (p+1) \text{ divise } n \\ 0 & \text{si sinon} \end{cases}.$$

La suite V n'est pas engendrée par la famille $(U_1, ..., U_n)$, c'est absurde. Finalement, $\mathscr{P}$ n'est pas de dimension finie .

I-2 Décomposition de $\mathscr{P}$ en somme directe.

(a) Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et p une de ses périodes. Montrons d'abord que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A(U, p, n) = A(U, p, 0).$$

Par division euclidienne de n par p, on a $n = pq + r$ avec $r \in [\![0, p-1]\!]$, on peut écrire :

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u_{n+k} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u_{r+k} = \frac{1}{p}\sum_{i=r}^{p+r-1} u_i = \frac{1}{p}\sum_{i=r}^{p-1} u_i + \frac{1}{p}\sum_{i=p}^{p+r-1} u_i.$$

Or

$$\sum_{k=p}^{p+r-1} u_k = \sum_{k=p}^{p+r-1} u_{k-p} = \sum_{j=0}^{r-1} u_j$$

D'où,

$$A(U, p, n) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u_{n+k} = \frac{1}{p}\left(\sum_{i=r}^{p-1} u_i + \sum_{j=0}^{r-1} u_j\right) = A(U, p, 0).$$

Vérifions maintenant que $A(U, p, 0) = A(U, p_0, 0)$ où p_0 est la plus petite période de U. D'après ce qui précède, il existe alors $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = p_0 q$, puis, par division euclidienne par p_0, tout entier $k \in [\![0, p-1]\!]$, s'écrit de manière unique $k = p_0 i + r$ où $r \in [\![0, p_0 - 1]\!]$ et $i \in [\![0, q-1]\!]$. On a :

$$A(U, p, 0) = \frac{1}{p_0 q}\sum_{k=0}^{p-1} u_k = \frac{1}{p_0 q}\sum_{i=0}^{q-1}\sum_{r=0}^{p_0-1} u_{p_0 i + r}.$$

Mais, pour tout entier i, on a :

$$\sum_{i=0}^{q-1} u_{p_0 i + r} = \sum_{i=0}^{q-1} u_r = q u_r.$$

D'où :

$$A(U, p, 0) = \frac{1}{p_0 q}\sum_{i=0}^{q-1}\sum_{r=0}^{p_0-1} u_r = \frac{1}{p_0}\sum_{r=0}^{p_0-1} u_r = A(U, p_0, 0)$$

Finalement, pour tout entier n et toute période p, $A(U, p, n) = A(U, p_0, 0)$. Cela montre que ce terme ne dépend ni de l'entier n ni du de la période p de U.

(b) On vient de voir que $L(\Omega) = 1$ (Ω est de période 1). On a vu que C était de période 4 donc $L(C) = \dfrac{1}{4}(c_0 + c_1 + c_2 + c_3) = 0$.

(c) On remarquer que $L(\Omega) = 1 \neq 0$ et que $L(C) = 0$. Donc $\Omega \notin \mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_0 \neq \{0\}$.
Soit U une suite périodique, la suite $V = U - L(U)\Omega \in \mathscr{P}_0$ car

$$L(V) = L(U - L(U)\Omega) = L(U) - L(U)L(\Omega) = 0$$

Donc $U = V + L(U)\Omega$ avec $V \in \mathscr{P}_0$ et $L(U)\Omega \in \mathscr{P}_0$, ce qui prouve que $U \in \mathscr{P}_0 + \mathscr{P}_1$. D'où :

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_0 + \mathscr{P}_1.$$

Soit $U \in \mathscr{P}_0 \cap \mathscr{P}_1$, donc U est 1-périodique et son premier terme est nul, donc U est la suite nulle. D'où :

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_0 \oplus \mathscr{P}_1.$$

I-3 Étude d'un endomorphisme D_0 de $\mathscr{P}_0$.

(a) • Soit p une période de U, pour tout entier n,

$$u'_{n+p} = u_{n+p+1} - u_{n+p} = u_{n+1} - u_n = u'_n.$$

Cela prouve que U' est périodique, donc $U' \in \mathscr{P}$ et que l'application D transforme $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{P}$.
• Soit U et V dans $\mathscr{P}$ et λ, μ dans $\mathbb{C}$. Notons $W = \lambda U + \mu V$ et $U' = D(U)$, $V' = D(V)$ ainsi que $W' = D(W)$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} w'_n &= w_{n+1} - w_n \\ &= (\lambda u_{n+1} + \mu u_{n+1}) - (\lambda u_n + \mu u_n) \\ &= \lambda(u_{n+1} - u_n) + \mu(v_{n+1} - v_n) \\ &= \lambda u'_n + \mu v'_n \end{aligned}$$

Cela montre que $D(\lambda U + \mu V) = \lambda D(U) + \mu D(V)$ et donc que D est un endomorphisme de $\mathscr{P}$.
• Puisque Ω est de période 1, alors $D(\Omega) = 0$. D'après ce qui précède une période C est aussi une période de $C' = D(C)$. Il suffit donc de calculer c'_0, c'_1, c'_2 et c'_3. On a alors

$$c'_0 = -1, c'_1 = 1, c'_2 = 1 \text{ et } c'_3 = -1$$

On en déduit que pour tout entier n,

$$c'_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 0 \text{ ou } 3 \text{ modulo } 4 \\ 1 & \text{si sinon} \end{cases}.$$

• Soit $U \in \ker(D)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$. Cela implique de U est constante. Réciproquement, si U est constante $D(U) = 0$. On obtient

$$\ker(D) = \mathrm{Vect}(\Omega).$$

• Soit $U' \in \mathrm{Im}(D)$ et $U \in \mathscr{P}$ tel que $U' = D(U)$. Soit p une période de U, c'est aussi une période de U', on a :

$$L(U') = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u'_k = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}(u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{p}(u_p - u_0) = 0$$

Donc $\mathrm{Im}(D) \subset \mathscr{P}_0$.
Montrons maintenant que $\mathscr{P}_0 \subset \mathrm{Im}(D)$. Soit U telle que $L(U) = 0$. On cherche V telle que $U = D(V)$. Cela implique que pour tout entier n, $u_n = v_{n+1} - v_n$. En utilisant un télescopage on voit que nécessairement, pour tout entier n,

$$v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

Posons donc, en prenant par exemple $v_0 = 0$, la suite V définie par : $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$. On remarque que si p est une période de U et $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+p} - v_n = \sum_{k=n}^{n+p-1} u_k = pA(U,p,n) = pL(U) = 0.$$

Cela prouve que V est périodique. Il est alors aisé de vérifier que $D(V) = U$. D'où :

$$\text{Im}(D) = \mathscr{P}_0.$$

(b) Comme $\text{Im}(D) = \mathscr{P}_0$, l'espace vectoriel $\mathscr{P}_0$ est stable par D. Soit $U \in \mathscr{P}_0$ et V de $\mathscr{P}$ telle que $D(V) = U$. D'après ce qui précède

$$V = V_0 + V_1$$

où $V_0 \in \mathscr{P}_0$ et $V_1 \in \mathscr{P}_1$. La suite V_0 est donc un antécédent de U dans $\mathscr{P}_0$ et tout autre antécédent de U est de la forme $V_0 + \lambda\Omega$ car $\ker(D) = \mathscr{P}_1$. Donc U a un unique antécédent dans $\mathscr{P}_0$ et par suite l'endomorphisme induit sur $\mathscr{P}_0$ par D est un automorphisme.

(c) Soit $U \in \mathscr{P}_0$ un éventuel vecteur propre et λ une éventuelle valeur propre associée. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u'_n = \lambda u_n$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = (\lambda + 1)u_n.$$

La suite U est donc nécessairement une suite géométrique de raison λ où de plus $u_0 \neq 0$ car $U \neq 0$.
Si p est une période de U, on a alors $u_p = (1+\lambda)^p u_0 = u_0$ donc $(1+\lambda)^p = 1$. Cela implique que $\lambda = \mu - 1$ où μ est une racine p-ème de l'unité .
Réciproquement pour tout entier p non nul et toute racine p-ème de l'unité différente de 1, si on pose $u_n = \mu^n$, la suite U est périodique (elle admet p pour période), on a

$$L(U) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \mu^k = \frac{1-\mu^p}{1-\mu} = 0,$$

donc $U \in \mathscr{P}_0$.
Finalement les valeurs propres de D sont les nombres complexes λ de la forme $\mu - 1$ où μ est une racine de l'unité différente de 1 et l'espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par la suite géométrique de raison μ.

I-4 Étude d'une application linéaire de $\mathscr{P}_0$ dans $\mathscr{P}$.

(a) Il est clair que θ est linéaire. Il reste à montrer que θ est bien à valeurs dans $\mathscr{P}$.
Soit $U \in \mathscr{P}_0$. Soit p une période de U. Montrons que p est une période de U^*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u^*_{n+p} = u^*_n + \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k = u^*_n + pL(U) = u^*_n$$

car $U \in \mathscr{P}_0$. Donc $\theta(U) = U^* \in \mathscr{P}$.

(b) Soit $U \in \ker(\theta)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = u^*_n - u^*_{n-1} = 0 - 0 = 0$$

et par périodicité $u_0 = 0$. Donc U est la suite nulle. La réciproque est évidente par linéarité de θ. Ainsi $\ker(\theta) = \{0\}$ et θ est injective.
Soit $V \in \mathscr{P}$ de période p. Posons $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n = v_n - v_{n-1}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_0 = v_p - v_{p-1}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+p} = v_{n+p} - v_{n+p-1} = \begin{cases} v_n - v_{n-1} = u_n & \text{si } n > 1 \\ v_p - v_{p-1} = v_0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Donc U est p-périodique. Enfin,

$$L(U)=\frac{1}{p}\sum_{k=}^{p}u_k=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p}(v_k-v_{k-1})=v_p-v_0=0.$$

Donc $U\in\mathscr{P}_0$, de plus $\theta(U)=V$. Ainsi θ est surjective et $\mathrm{Im}(\theta)=\mathscr{P}$.

Deuxième partie

II-1 Soit $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathscr{P}$ et α un réel strictement supérieur à 1.

- La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n$ converge si, et seulement si, son terme général est nulle.
- Comme U est bornée ($\mathscr{P}\subset\mathscr{B}$), alors il existe $M>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|v_n|=\left|\dfrac{u_n}{n^\alpha}\right|\leq\dfrac{M}{n^\alpha}$. Comme la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}v_n$ est absolument convergente, donc convergente.

II-2 (a) On a :

$$\frac{1}{kp+j}=\frac{1}{kp}\left(\frac{1}{1+\frac{j}{kp}}\right)=\frac{1}{pk}\left(1-\frac{j}{pk}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)=\frac{1}{pk}-\frac{j}{p^2k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

(b) Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$w_k=\sum_{j=0}^{p-1}\frac{u_j}{kp+j}=\left(\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}u_j\right)\frac{1}{k}-\left(\frac{1}{p^2}\sum_{j=0}^{p-1}ju_j\right)\frac{1}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Deux cas sont possibles :

- Si $U\in\mathscr{P}_0$ alors $w_k=O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$, donc la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}w_k$ converge absolument, donc converge.
- Si $U\notin\mathscr{P}_0$ alors $w_k\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{L(U)}{k}$. Comme la série harmonique est divergente, la séries $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}w_k$ diverge.

(c) Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on pose $a_k=\sum\limits_{i=kp}^{kp+p-1}\dfrac{u_i}{i}$ et $a_0=\sum\limits_{i=1}^{p-1}\dfrac{u_i}{i}$. Par le changement d'indice $i=kp+j$ et par p-périodicité de $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient :

$$a_k=\sum_{i=kp}^{kp+p-1}\frac{u_i}{i}=\sum_{j=0}^{p-1}\frac{u_{kp+j}}{kp+j}=\sum_{j=0}^{p-1}\frac{u_j}{kp+j}=w_k$$

Montrons maintenant que les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}w_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{u_n}{n}$ sont de même nature et qu'elles ont la même somme.

Prenons n un entier et k entier définie par $kp\leq n<kp+p-1$.

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{u_j}{j}-\sum_{j=0}^{k}w_j\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{u_j}{j}-\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{p-1}\frac{u_i}{jp+i}\right|\\ &= \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{u_j}{j}-\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{p-}\frac{u_{jp+i}}{jp+i}\right|\\ &= \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{u_j}{j}-\sum_{l=0}^{kp+p-1}\frac{u_l}{l}\right|=\left|\sum_{j=n+1}^{kp+p-1}\frac{u_j}{j}\right|.\end{aligned}$$

D'où
$$\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{u_j}{j}-\sum_{j=0}^{k}w_j\right|\leq\sum_{j=n+1}^{kp+p-1}\frac{|u_j|}{j}\leq\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{p-1}|u_j|\,.$$
On conclut que la série de terme général w_n converge vers la même limite que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}w_n.$$
D'après les deux questions précédentes, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{u_n}{n}$ converge, si et seulement si, $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}w_k$ converge ou encore, si et seulement si, $U\in\mathscr{P}_0$.

II-3 Deux exemples :

(a) Soit $U\in\mathscr{P}_0$. Notons $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de sommes partielles associée à $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{u_n}{n}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :
$$\begin{aligned}
s_{np} &= \sum_{k=1}^{np}\frac{w_k}{k}=\sum_{k=1}^{np}w_k\int_0^1 t^{k-1}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1\sum_{k=1}^{np}w_k t^{k-1}\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n-1}w_{kp+i}t^{kp+i-1}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1\sum_{i=1}^{p}w_i t^{i-1}\sum_{k=1}^{n-1}t^{kp}\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{i=1}^{p}w_i t^{i-1}\frac{1-t^{pn}}{1-t^p}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1\sum_{i=1}^{p-1}w_i t^{i-1}\frac{1-t^{pn}}{1-t^p}\mathrm{d}t+\int_0^1 w_p t^{p-1}\frac{1-t^{pn}}{1-t^p}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1\sum_{i=1}^{p-1}w_i t^{i-1}\frac{1-t^{pn}}{1-t^p}\mathrm{d}t-\int_0^1\sum_{i=1}^{p-1}w_i t^{p-1}\frac{1-t^{pn}}{1-t^p}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1\sum_{i=1}^{p-1}w_i\frac{t^{i-1}-t^{p-1}}{1-t^p}\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{p-1}\int_0^1 t^{np-1}\frac{t^p-t^i}{1-t^p}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $i\in[\![1,p-1]\!]$, la fonction $t\mapsto\frac{t^p-t^i}{1-t^p}$ se prolonge par continuité en 1 puisque $\lim_{t\to1}\frac{t^p-t^i}{1-t^p}=\frac{i-p}{p}$, donc elle bornée. Donc il existe $M_i>0$ tel que $\forall t\in[0,1]$, $\left|\frac{t^p-t^i}{1-t^p}\right|\leq M_i$ et par conséquent $\left|\int_0^1 t^{np-1}\frac{t^p-t^i}{1-t^p}\mathrm{d}t\right|\leq M_i\int_0^1 t^{np-1}=\frac{M_i}{pn}$. D'où $\lim_{n\to\infty}s_{np}=\sum_{i=1}^{p-1}w_i\int_0^1\frac{t^{i-1}-t^{p-1}}{1-t^p}\mathrm{d}t$.

La suite C est bien dans $\mathscr{P}_0$ et est 4-périodique, donc
$$S(C)=\sum_{i=1}^{3}c_i\int_0^1\frac{t^{i-1}-t^3}{1-t^4}\mathrm{d}t=-\int_0^1\frac{1-t^3}{1-t^4}\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{t^2-t^3}{1-t^4}\mathrm{d}t=-\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=-\frac{\pi}{4}.$$

(b) Calculons la somme des Np premiers termes de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{t_n}{n}$ où $N\in\mathbb{N}^*$. Notons $H_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$.

On a :

$$\begin{aligned} S_{Np}(x) &= \sum_{n=1}^{Np} \frac{t_n}{n} = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{kp+j} - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} \\ &= \sum_{l=1}^{pN} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} \\ &= H_{Np} - H_N = \ln(Np) + \gamma - \ln(N) - \gamma + o(1) \\ &= \ln(p) + o(1). \end{aligned}$$

Puisque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{t_n}{n}$ converge ($\sum_{n=1}^{p} t_n = 0$), alors la suite $(S_{Np})_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la somme de la série, d'où :

$$S(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{n} = \lim_{N\to\infty} S_{Np} = \ln(p).$$

Troisième partie

III-1 On remarque pour commencer que si U appartient à $\mathscr{P}$ et λ est un complexe, $L(\lambda U) = \lambda L(U)$ de manière évidente.
Si U et V sont deux suites de $\mathscr{P}$ et si on note p et q des périodes respectives. On sait que $r = pq$ est une période de $U + V$. On en déduit que

$$L(U+V) = A(U+V, r, 0) = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (u_k + v_k) = A(U, r, 0) + A(V, r, 0) = L(U) + L(V)$$

car r est une période de U et V.
Soit $U \in \mathscr{P}$. Soit p une période de U,

$$|L(U)| = \left| \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u_k \right| \leq \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} |u_k| \leq \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \|U\|_\infty = \|U\|_\infty.$$

On en déduit que L est 1-lipschitzienne et $|||L||| = \sup_{U\neq 0} \frac{|L(U)|}{\|U\|_\infty} \leq 1$.
De plus, $\|\Omega\|_\infty = 1$ et $L(\Omega) = A(\Omega, 1, 0) = w_0 = 1$. Donc $\frac{|L(\Omega)|}{\|\Omega\|_\infty} = 1$. Cela implique que $\|L\| = 1$.
$\mathscr{P}_0 = \ker(L) = L^{-1}\{0\}$ est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

III-2 Soit U dans $\mathscr{P}$. Pour tout entier n, on a :

$$|u'_n| = |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2\|U\|_\infty$$

On en déduit que $\|D(U)\|_\infty \leq 2\|U\|_\infty$. L'application D est 2-lipschitzienne.
Si on considère la suite U définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout entier n. On a que $\|U\|_\infty = 1$ alors qu'en notant encore $U' = D(U)$ on a $u'_0 = u_1 - u_0 = (-1) - 1 = -2$ et donc $\|D(U)\|_\infty \geq 2$. Donc $\|D\| = 2$.

III-3 Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et soit U la suite $2q$-périodique telle que $(u_0, u_1, ..., u_{q-1}, u_q, ..., u_{2q-1}) = (1, 1, ..., -1, -1, ..., -1)$.
Cette suite appartient bien à $\mathscr{P}_0$ et $\theta(U) = (1, 2, ..., q, q-1, q-2, ..., 1, 0, 1, 2, ...)$, alors on a

$$\frac{\|\theta(U)\|_\infty}{\|\|_\infty} = \frac{q}{1} = q.$$

Donc la fonction $U \mapsto \frac{\|\theta(U)\|_\infty}{\|U\|_\infty}$ n'est pas bornée sur $\mathscr{P} \setminus \{0\}$. Ainsi l'application linéaire θ n'est pas lipschitzienne de $(\mathscr{P}_0, \|.\|_\infty)$ vers $(\mathscr{P}, \|.\|_\infty)$.

III-4 <u>Étude de la continuité de la forme linéaire S</u> :

(a) Considérons la fonction $t \in [0,1[\mapsto \dfrac{1-t^q}{(1-t)(1-t^p)} = \dfrac{1+t+...+t^{q-1}}{1+t^q}$ qui est continue sur $[0,1[$ et se prolonge par continuité en 1. Pour tout $t \in [0,1]$, $0 < 1+t^q \leq 2$ donc $\dfrac{1}{1+t^p} \geq \dfrac{1}{2}$. De plus, $1+t+...+t^{q-1} \geq 0$ donc $\dfrac{1+t+...+t^{q-1}}{1+t^q} \geq \dfrac{1}{2}(1+t+...+t^{q-1})$. Par croissance de l'intégrale,

$$I_q \geq \int_0^1 \frac{1}{2}(1+t+...+t^{q-1})\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{q-1}\frac{1}{j+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k}.$$

Comme la série harmonique est divergente, la suite de ses sommes partielles a pour limite $\infty+$. On en déduit par minoration que la suite $(I_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

(b) La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien un élément de $\mathscr{P}_0$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{z_n}{n}$ est convergente. La suite $(V_N)_{N\geq 1}$ est donc une sous-suite de la suite de sommes partielles associée à la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{z_n}{n}$. Calculons donc V_N. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
V_N &= \sum_{k=1}^{2qN}\frac{z_k}{k} = \sum_{k=1}^{2qN} z_k \int_0^1 t^{k-1}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k=1}^{2qN} z_k t^{k-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{i=1}^{2q}\sum_{k=1}^{N-1} z_{2kq+i}t^{2kq+i-1}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^{2q} z_i t^{i-1}\sum_{k=1}^{N-1} t^{2kq}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{i=1}^{2q} z_i t^{i-1}\frac{1-t^{2qN}}{1-t^{2q}}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{q} t^{i-1}\frac{1-t^{2qN}}{1-t^{2q}} - \sum_{i=q+1}^{2q} t^{i-1}\frac{1-t^{2qN}}{1-t^{2q}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1-t^{2qN}}{1-t^{2q}}\left(\sum_{i=1}^{q} t^{i-1} - \sum_{i=q+1}^{2q-1} t^{i-1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1-t^{2qN}}{1-t^{2q}}\left(\frac{1-t^q}{1-t} - t^q\frac{1-t^q}{1-t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(1-t^q)(1-t^{2qN})}{(1-t)(1+t^q)}\mathrm{d}t = I_q - \int_0^1 \frac{(1-t^q)t^{2qN}}{(1-t)(1+t^q)}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{(1-t^q)}{(1-t)(1+t^q)}$ est continue sur $[0,1[$ et se prolonge par continuité en 1, donc elle est bornée par un certain $M_q \geq 0$. Donc

$$\left|\int_0^1 \frac{(1-t^q)t^{2qN}}{(1-t)(1+t^q)}\mathrm{d}t\right| \leq M_q\int_0^1 t^{2qN}\mathrm{d}t = \frac{M_q}{2qN+1}.$$

Donc on peut conclure que $S(Z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z_n}{n} = \lim_{N\to+\infty} V_N = I_q$.

(c) D'après les calculs précédents, on a :

$$\frac{|S(Z)|}{\|Z\|} = \frac{I_q}{1} = I_q.$$

Mais $\displaystyle\lim_{q\to\infty} I_q = +\infty$. Donc la fonction $U \mapsto \dfrac{|S(U)|}{\|U\|_\infty}$ n'est pas majorée sur $\mathscr{P}_0 \setminus \{0\}$. Donc S n'est pas lipschitzienne de $(\mathscr{P}_0, \|.\|_\infty)$ vers $(\mathbb{C}, |.|)$.

●●●●●●●●●●●